Даниел А. Романо*
Универзитет у Источном Сарајеву
Педагошки факултет у Бијељини

УДК 37.016:51
DOI 10.7251/NSK1515002R
Оригинални научни рад

ЈЕДАН ПРИМЈЕР ДИЗАЈНА ЗАДАТАКА У УВРЂИВАЊУ МАТЕМАТИЧКИХ УМИЈЕЋА

Апстракт: *У овом тексту описани су принципи дизајна задатака на примјеру класификационог испита из математике одржаном на Машинском факултету Универзитета у Бањој Луци 1.9.2014. године. Кроз анализу тих задатака идентификују се нека осјетљива мјеста дизајнирања испитних задатака. У тексту се износи хипотеза да се наставничко разумијевањем процеса дизајнирања испитних задатака отвара могућност установљавања студентских размишљања при рјешавању тако дизајнираних задатака.*

Кључне ријечи: *дизајнирање задатака, рјешавање проблема.*

Увод

Анализирање успјешности у рјешавању математичких задатака кандидата који се пријављују на Машински факултет у Бањој Луци је прилика за утврђивање математичких умијећа свршених средњошколаца у нашем образовном систему. То, наравно, није наш научни интерес. Наш научни интерес је како дизајнирати задатаке за то тестирање и које повратне показатеље можемо прикупити тако дизајнираним задацима. Наш научни интерес је поткрепљивање наше хипотезе да постоји провалија између прокламованих циљева математичког образовања у нашој друштвеној заједници и установљених математичких умијећа тестираних кандидата. Наш научни циљ у овим анализама је разумијевање чинилаца који доводе до тога. Остављајући по страни компетентност реализатора наставе математике који су подучавали тестиране ученике, превасходни циљ ових анализа је разумијевање зашто примјењиване дидактике доводе до овог јаза.

Методологија примијењена у осмишљавању и избору и/или дизајнирању питања и задатака за овај математички тест на класификационом испиту на Машинском факултету Универзитета у Бањој Луци у складу је са детерминацијом елемената математичких умијећа према чувеној књизи *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics***“** (National Academy Press, Washington, DC, 2001.) Џереми Килпатрик, Џејн Сваффорд и Брадфорд

* bato49@hotmail.com

Финдел: *Разумијевање концепата*, *Процедурална флуентност*, *Стратегијске компетенције*, *Адаптивно закључивање* и *Оперативна склоност*. Усвајање математичких концепата и њихово флуентно кориштење у процедурама, али и подстицај развоја разних облика математичког мишљења требало би да су главни циљеви школског математичког образовања. Дакле, задаци су изабрани и дизајнирани тако да омогућавају установљавање постојања елемената математичких мишљења (на примјер: логичког, аритметичког, рано-алгебарског, алгебарског и геометријског мишљења...) у когнитивним равнима тестираних кандидата на основном и напреднијем нивоу.

У литератури постоји више таксономија математичких задатака релативно блиских једна другој. Крис Сангвин, у свом тексту [19], нуди промишљања о миљеу у коме би требало дизајнирати испитне задатаке. Он је мишљења да би значења објеката, концепата и процеса са њима требало да су заснована на анализама онога шта се стварно захтијева од ученика/студената да ураде.

Проблем дизајнирања наставних материјала а посебно дизајнирања математичких задатака за утврђивање успјешности ученика/студената у овладавању математичких умијећа, процјењује се, привлачи недовољну пажњу научне и академске јавности. Ми смо становишта да би сваки наставник прије упуштања у разумијевање парадигме дизајнирања математичких задатака за тестирање својих ученика/студената требало да је свјестан сљедећих питања:

(а) Идентификација математичког проблема који ће бити постављен ученицима /студентима посредством задатка;

(б) Идентификовати који циљеви наставе математике би могли бити остварени ученичким/студентким рјешавањем конкретног изабраног или дизајнираног задатка;

(в) Идентификовати принципијелно-филозофска опредјељења наставничког подучавања и ученичког/студентског учења која су инволвирана у конкретни изабрани или дизајнирани задатак; и

(г) Идентификовати ниво комуникације у дидактичком тространику „наставник – задатак – ученик“ посредством очекиваних исхода али и комплексности конкретног изабраног или дизајнираног задатка.

Овај текст, иако у основи намијењен академској јавности и менаџменту Машинског факултет у Бањој Луци, вјерујемо, може бити користан студентима другог и трећег циклуса студијских група за образовање реализатора наставе математике на свим нивоима образовања.

Рјешавање структурних проблема

Скоро свака наставна лекција из математике прати одређену форму коју су својевремено (1999) Џејмс Стиглер и Џејмс Хајберт ([20]) идентификовали као „рјешавање структурних проблема“ (structured problem solving). У нашој наставној пракси готово увијек се ова активност поједностављује фокусирањем на рјешавање једног или више нелинеарно сложених (или, унутар SOLO – таксономије, мулти структуралних) задатака. Активности при рјешавању таквих задатака уобичајено се разлажу у слиједеће четири фазе:

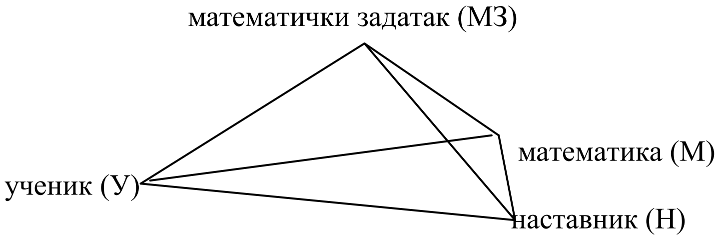
1. Претстављање проблема,
2. Ученичко/студентско разумијевање и рјешавање проблема,
3. Упоређивање добивених рјешења и процјењивање њихове прихватљивости, и
4. Наставничка сублимација.

Под синтагмом „представљање проблема“ уобичајено се подразумијева наставниково обраћање ученицима/студентима с циљем да им помогне да разумију контекст задатка и шта се очекује као прихватљиво рјешење тог задатка. То не укључује било какво упутство о томе како се задатак може ријешити. Умјесто тога, од ученика/студената се очекује да самостално и независно један од другога покушавају пронаћи рјешење постављеног задатка унутар неког реалног времена и за то вријеме бар неки од ученика/студената би требало да конструишу рјешење задатка.

Ова концепција претпоставља да ће ученици/студенти током самосталног рада понудити различите процедуре у поступку рјешавања постављеног задатка. У трећој фази упоређују се не само методе које су ученици /студенти изабрали за рјешавање већ и рјешења датог задатка уз обавезно процјењивање прихватљивости понуђених рјешења. Дакле, с циљем помагања свим ученицима/студентима да разумију употребљене математичке концепте и примијењене процедуре подстиче се развој елемената математичког мишљења. Да би се потстицао развој мишљења требало би да је задатак разумљив за већину ученика/студената уз минималне наставничке интервенције и требало би да је рјешив (али не превише брзо) бар неким од њих.

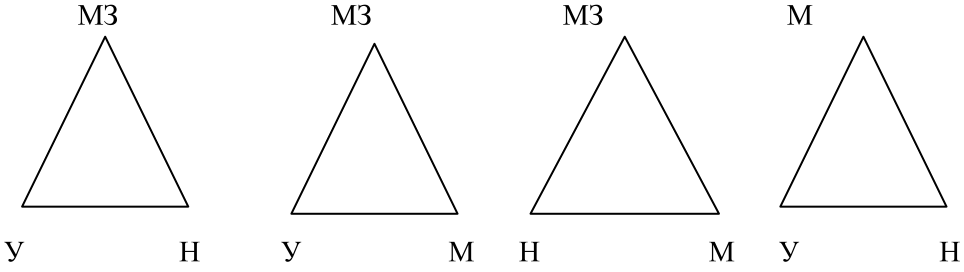
У четвртој фази наставник може рећи нешто по чему су изабране стратегије софистиране и зашто али би такође требало да истакне математичке и образовне вриједности разматраног задатка.

Себастијан Ризет и Рудолф Штрасер ([16], Rezat and Strässer 2012) идентификовали су ученичке/студентске математичке активности као један од концепата инструменталних аката Виготског (Vygotsky), при чему се ученичка/студентска интеракција са математичким идејама реализује посредством математичких задатака. Чини се да је екстремно важно уочавати функционалне везе математичких задатака са подстицањем ученичког/студентског учења и настојањима наставника у подучавању ученика/студената математици. У контексту претходног, поменути истраживачи математичког образовања реконцептуализовали су добро познати дидактички тространик (наставник – ученик /студент – математика) у социо – дидактички тетраедар чија су тјемена наставник (Н), ученик /студент (У), математика (М) и математички задатак (МЗ). Ова реконцептуализација дидактичких веза поентира постојање више вишеслојних веза него раније представљених, у овом случају, странама тог тетраедра.



Скица 1.

Може се казати да свака од тих страна, у овом случају, сваки од тих тространика, поентира постојање посебних аспеката гледања на математичке задатке унутар математичког образовања ученика/студената.



Скица 2.

Дидактичка улога наставника је доста добро описана као оркестрација ученичких/студентских активности посредством тространика *наставник – задатак – ученик / студент.* Тространик *ученик/студент – задатак – математика* репрезнетује њихове неопходне активности при учењу математике, док тространик *наставник – задатак – математика* добро представља дидактичке активности наставника у подучавању ученика/студената математици (конструисање тзв. „фундаменталне ситуације“ унутар Теорије дидактичких ситуација математичког образовања).

Сангвин и Поинтон ([14]) су развили једну таксономију математичких питања са намјером да покрију класификацију математичких задатака:

1. Описивање чињеница,
2. Експонирање рутина израчунавања или у раду са алгоритмима,
3. Класификација математичких објеката,
4. Интерпретација ситуација или одговора,
5. Доказивање, показивање и процјењивање (општа аргументација),
6. Проширивање концепата,
7. Конструисање примјера,
8. Анализа погрешака.

Овај аспект рјешавања задатака намеће одређене захтјеве при дизајнирању тих задатака.

Дизајнирање математичких задатака

Активности који су укључене у формирању хипотеза истраживања могу се категорисати на основу тога да ли се односе на (1) наставни програм, (2) ученике / студенте, (3) математику, или (4) задатке. Међутим, утврђивање ученичке / студентске успјешности углавном се фокусира на то да ли су изабрани задаци у складу са циљевима истраживања. Истраживачи математичког образовања праве дистинкцију између „учити како се рјешавају задаци“ и „учити математику посредством рјешавања задатака“. То имплицира да се ученици /студенти упознају са већим бројем математичких концепата али и њиховим флуентним кориштењем фокусирањем од јадан до три задатка истог типа. Ако су добро изабрани, они омогућавају ученичко/студентско сагледавање нових математичких идеја у тим задацима кориштењем евентуално нових математичких објеката, процеса са њима али и увјежбавање процедура са њима. Ученичким /студентским самосталним радом у рјешавању задатака подстичу се како њихов развој *стратешких компетенција*, *адаптивног закључивања* али и наставничког установљавања елемената *оперативних склоности* код ученика/студената.

Тако имамо сљедеће принципе дизајнирања задатака ([8], [9]):

- Прикладност и математичка значајност кориштених термина у сагласности са циљевима постављања задатка;
- Контекстност задатка од интереса за ученике /студенте;
- Захтјевност задатка је у складу са циљем постављања задатка;

- Постављање питања у задатку омогућава проналажење различитих стратегија за његово рјешавање;
- Стратегије примјенљиве у постављеном задатку примјенљиве су и за рјешавање неких других математичких задатке или реалних животних проблема и
- Задатак има потенцијал да се у току његовог рјешавања уоче, и евентуално прихвате, неке пожељне социјалне и социјано-математичке норме.

У тексту [10] појављују се слиједећи принципи дизајнирања задатака:

Принцип 1: *Постоји стварно утапање концепта задатка у ученички/ студентски реални свијет.*

Принцип 2: *Постоји могућност идентификације и спецификације математички важних питања из општих тврдњи.*

Принцип 3: *Формулација бар једног алгоритма рјешавања задатка је изводљива коришћењем знања и вјештина доступних ученику / студенту на том нивоу образовања уз конструисање неопхидних претпоставки и скупа неопходних датих података.*

Принцип 4: *Математичка рјешења постављеног базног проблема су у доброј корелацији са математичким знањима и вјештинама ученика/студената*.[1]

Принцип 5: *Процедура процјењивања успјешности је изводљива како за математичку коректност, тако и прихватљивост рјешења уз уважавање захтјева контекста датог задатка.*

Дидактички принцип: *Проблем може бити структуиран у низ мање комплексних питања уз могућност реинтеграције у реалне ситуације*.[2]

Брајан Доиг, Сузан Гровес и Такиашира Фуџи ([6], [7]) истичу слиједеће четири врсте задатака које се уобичајено користе:

(1) задаци који се непосредно односе на неки математички концепт;
(2) задаци посредством којих се подстиче флуентност математичких процедура;

---

[1] Комотније говорећи, унутар школског система математичког образовања, Принцип 3. и Принцип 4. поентирају обавезно чврсту високу корелацију наставних планова и програма математичког образовања ученика са постављеним задацима.

[2] Ово може бити реализовано као прикладни подстицаји од стране наставника, или уз наставничке интервенције примјеном технологије „scaffolding- a“.

(3) задаци у којима се прецизно испитују могућности и
(4) задаци у којима се установљава разумијевање или недовољно разумијевање концепата и процеса са њима.

Један примјер дизајнирања задатака са анализом успјешности

У овом дијелу описан је дизајн задатака на примјеру класификационог испита из математике одржаном на Машинском факултету Универзитета у Бањој Луци 01.09.2014. Кандидати су претходно имали могућност да се упознају са сличним задацима и њиховим рјешењима на тестирањима реализованим ранијих година на овом факултету. Значајнијим поентирањем разумијевања математичких објеката и процеса са њима у изабраним окружењима и препознавање елемената разних облика математичког мишљења код тестираних кандидата у односу на вјештине рада са алгоритмима, овај избор и/или дизајнирање ових задатака уочљиво дистанцира од уобичајене праксе избора задатака за пријемни тест из математике на осталим техничким факултетима у нашем региону.

Кроз анализу тих задатака идентификује се нека осјетљива мјеста дизајнирања испитних задатака.

Задатак 1. (**5 бодова**)(Утврђивање постојања аритметичког мишљења)

Дати су објекти: 2, -2, 0, $\frac{3}{7}$, e, α, π, $\sqrt{2}$, $7-4i$, $\sqrt[3]{7}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Који од њих су природни, који цијели, који рационални, који ирационални, а који комплексни бројеви?

Одговор: 1.1. Природан број је: 2

1.2. Цијели бројеви су: 2, -2, 0

1.3. Рационални бројеви су: 2, -2, 0, $\frac{3}{7}$

1.4. Ирационални бројеви су:

$\pi \approx$ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 ... (π је ирационалан број и дефинише се као количник обима и пречника било које кружнице. π је такође познат и као *Архимедова константа* (не треба га мијешати са Архимедовим бројем) или *Лудолфов број*).

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ (Корјенови простих бројева су ирационални бројеви.)

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx$ 2.71828 18284 59045 23536 02874 ... (Број e, као математичка константа, још је познат као и *мали Ојлеров број* и/или *Неперова константа*.) Скуп $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in N\right\}$ реалних (заправо, рационалних) бројева је монотоно растући и ограничен одозго низ у пољу $\boldsymbol{R}$ и, према томе, има јединствену граничну вриједност (супремум) и означавамо је (малим) словом e.

1.5. Комплексни број је: $7 - 4i$.[3]
1.6. Симбол α није број.

Циљеви задатка: Задатак је типа (1): Препознавање математичких објеката (2, -2, 0, $\frac{3}{7}$, $\sqrt{2}$, $7 - 4i$, $\sqrt[3]{7}$, e, π) и концепата (π, $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$).

Дистрибуција успјешности:

Број бодова	$\varnothing$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**
Број кандидата	3	9	12	9	5	4	3	**45**
%	6.67	20.0	26.67	20.0	11.11	8.89	6.67	**100.0**

Рефлексије: 53.33% тестираних кандидата није понудило никакве или је понудило скоро потпуно неприхватљиве одговоре на постављена питања. Дакле, преко половине тестираних кандидата не препознаје аритметичке објекте – природне и цијеле бројеве, док чак 26.67% кандидата не препознаје природне бројеве. Разломке не препознаје 73.33% кандидата. Препознавање ирационалних бројева и концепата је врло скромно – тек 26.67% кандидата.

Задатак 2. (**3 бода**) (Утврђивање постојања аритметичко-раноалгебарског мишљења) Одреди тачност /нетачност слиједећих исказа:

2.1. *Паран број* је природан број који се може представити као збир два иста природна броја.
2.2. *Паран број* је природан број који је дјељив бројем 2.
2.3. *Прост број* је природан број који је дјељив самим собом и бројем 1.

Одговор:
Исказ **2.1**. је дефиниција концепта *парног броја* и не може се говорити о тачности или нетачности дефиниције, већ о њеној коректности или некоректности. Ово је коректна дефиниција концепта *паран број*. Дакле, сваки паран природан број n има репрезентацију облика $n = a + a$, за неки природан број a. И, обрнуто, ако природан број n има презентацију претходног облика, тада је то паран број. Наравно, нису сви природни бројеви парни – преостале природне бројева називамо *непарним бројевима*. Уобичајено, скуп парних природних бројева означавамо са 2**N.** Дакле, $2\mathbf{N} = \{x\in\mathbf{N}: (\exists u\in\mathbf{N})(x = u + u)\} = \{2, 4, 6, ...\}$
2.2. Тврдња 2.2. је тачан исказ: *Природан број је паран број ако и само ако је дјељив бројем 2.*
Заиста, будући да се паран број n се представња у облику $n = a + a = 2a$ значи да је

[3] $7 - 4i$ је комплексан број а није реалан. Међу комплексне бројеве требало би сврстати и сваки горе поменути број јер је сваки реалан број истовремено и комплексан.

дјељив бројем 2. Обрнуто, ако је природан број дјељив бројем 2, тада се може представити у облику $n = 2a = a + a$ па закључујемо да је то паран природан број. Дакле, бројеви који нису парни, тј. непарни природни бројеви нису дјељиви бројем 2. Према томе, репрезентација непарних природних бројева је облика $2b+1$, при чему је $b \in \{0,1,2, ...\}$ или облика $2b-1$, при чему је $b \in \{1,2, ...\}$.

2.3. Исказ 2.3. је нетачан исказ јер сваки број дјељив је самим собом и јединицом. Коректан исказ гласи: *Прост број* је природан број већи од 1 и који је дјељив **само** самим собом и бројем 1. Ово је коректна дефиниција концепта *прост број*.

Циљеви задатка: Задатак је тима (4): Препознавање и разумијевање концепата парног броја (Питање 2.1. и Питање 2.2.) и (не)разумијевање концепта простог броја (Питање 2.3.). Разумијевање репрезентација овог концепата разврстава овај задатак у категорију подстицаја аритметичко-раноалгебарског мишљења.

Коментари: (1) Концепт парног, односно непарног, природног броја је екстремно важан јер се инсистирањем на разумијевању ових концепта и његовим својстава код ученика/студената подстиче развој елемената математичког мишљења: принципа искључења трећег (*Природан број је или паран или непаран.*) и принципа неконтрадикције (*Природан број не може истовремено бити паран и непаран.*)
(2) Концепт простог броја је фундаманетлан математички категоријалан појам и не може се редуковати на једноставније појмове.

Дистрибуција успјешности:

Број бодова	∅	0	1	2	3	Σ
Број кандидата	1	5	5	28	6	**45**
%	2.22	11.11	11.11	62.22	13.33	**100.0**

Рефлексије: Како се види из понуђене таблице дистрибуције успјешности, тек 6 (или 13.33%) кандидата препознаје концепт простог броја. Већина кандидата није препознала коректну детерминацију концепта „паран број“ већ га поистовјећује (што је прихватљиво) са његовом фундаменталном одредницом: *Природан број је паран број ако и само ако је дјељив бројем 2.*

Задатак 3. (**6 бодова**) (Регистрација елемената алгебарског мишљења) Покажи да
3.1. Ако је природан број n паран, тада је и његов квадрат n^2 такође паран број. (Како се алгебарски записује ова импликација?)
3.2. Ако је природан број n пепаран, тада је и његов квадрат n^2 такође непаран број. (Како се алгебарски записује ова импликација?)

Одговор.
3.1. Нека је n паран број. Тада се може представити у облику $n = 2u$ (за неки природан број u). Даље, је:
$$n^2 = (2u)^2 = 4u^2 = 2(2u^2) = 2u^2 + 2u^2.$$
Како је квадрат n^2 природног броја n дјељив бројем 2, он је такође паран природан број.
3.2. Нека је n непаран природан број. Тада се може представити у облику $n = 2u - 1$ (за неки природан број u). Даље, из
$$n^2 = (2u - 1)^2 = 4u^2 - 4u + 1 = 2(2u^2 - 2u + 1) - 1 .$$
закључујемо да је n^2 такође непаран природан број.
3.0. Импликација 3.1. алгебарски се записује у облику: $n \in 2\mathbf{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbf{N}$, док се импликација 3.2. записује у облику $n \in \mathbf{N} \setminus 2\mathbf{N} \Rightarrow n^2 \in \mathbf{N} \setminus 2\mathbf{N}$

Коментар: Задатак је типа (2): Подстицање флуентности рада са репрезентацијама. Овим задатком подстиче се развој алгебарског мишљења будући да је постављен захтјев „препознавање репрезентације парног броја и рад са том репрезентацијом".

Дистрибуција успјешности:

Број бодова	∅	0	1	2	3	4	5	6	**Σ**
Број кандидата	7	28	0	1	4	0	1	4	**45**
%	15.56	62.22	0.0	2.22	8.89	0.0	2.22	8.89	**100.0**

Рефлексије: Знатан број кандидата (36 од укупно 45, или 80%) репрезентовало је да не влада вјештинама рада са репрезентацијама парних бројева. Ниједан од тестираних кандидата није понудио одговоре у којима се коректно користи импликација.

Задатак 4. (**8 бодова**) (Логичко мишљење)
Покажи да:
4.1. Ако квадрат n^2 природног броја n није паран број, тада ни сам број n није паран број. (Како се алгебарски записује ова импликација?)
4.2. Ако квадрат n^2 природног броја n јесте паран број, тада је и сам број n такође паран број. (Како се алгебарски записује ова импликација?)

Одговор: (Индиректно закључивање)
Нека је квадрат n^2 природног броја n није паран број, тј. нека је непаран број. Треба доказати да је n непаран број. Претпоставимо супротно од траженог: претпоставимо да је n паран број. Тада би, према претходном задатку, и квадрат n^2 природног броја n био паран број што је у супротности са претпоставком да је квадрат n^2 природног

броја n непаран број. Добивена контрадикција произашла је из претпоставке да је n паран број. Ако одбацимо ту претпоставку, остаје да је n непаран број. Ова импликације се записује у облику: $n^2 \in \mathbf{N} \setminus 2\mathbf{N} \Rightarrow n \in \mathbf{N} \setminus 2\mathbf{N}$.

Доказ друге импликације: „Ако квадрат n^2 природног броја n јесте паран број, тада је и сам број n такође паран број." добива се аналогно претходном доказу. Ова импликације се записује у облику: $n^2 \in 2\mathbf{N} \Rightarrow n \in 2\mathbf{N}$.

Одговор:

Доказ	**Аргументација**
(1) Квадрат n^2 природног броја n је непаран број.	Хипотеза
(2) Број n је паран број.	Хипотеза
(3) $n = 2u$ (за неко $u \in \boldsymbol{N}$)	Представљање парног броја.
(4) $n = 2u$ (за неко $u \in \boldsymbol{N}$) $\Rightarrow n^2 = (2u)^2 = 4u^2 = 2(2u^2)$	Закључивање.
(5) $n^2 = (2u)^2 = 4u^2 = 2(2u^2)$	Примјена правила 'MP'
(6) Квадрат n^2 природног броја n јесте паран број	Препознавање репрезентације парног природног броја.
(7) Искази (1) и (6) су у контрадикцији.	Препознавање принципа неконтрадикције.
(8) $\neg(2)$	Одбацивање хипотезе (2).
(9) Број n није паран број.	Закључак.

Одговор.

4.0. Искази А $\Rightarrow$ В и $\neg$В $\Rightarrow$ $\neg$А (Контрапозиција тврдње А $\Rightarrow$ В) су логички еквивалентни. Тврдња А $\Rightarrow$ В је (не)тачна ако и само ако је тврдња $\neg$В $\Rightarrow$ $\neg$А (не)тачна.

4.1. Контрапозиција тврдње 3.1. „Ако је природан број n паран, тада је и његов квадрат n^2 такође паран број." гласи:

Ако квадрат n^2 природног броја n није паран број, тада ни сам број n није паран број.

Будући да је тврдња 3.1. тачна тврдња (Показано у Задатку 3.), то је и ова тврдња тачна.

4.2. Контрапозиција тврдње 3.2. 'Ако је природан број n није паран, тада је и његов квадрат n^2 такође није паран број.' гласи:

Ако квадрат n^2 природног броја n није непаран број, тада ни сам број n није непаран број.

Будући да је тврдња 3.2. тачна тврдња (Показано у Задатку 3.), то је и ова тврдња тачна такође.

Циљеви задатка: Утврђивање разумијевања и коректне употребе логичких алата „принципа искључења трећег", „принципа неконтрадикције",

„двоструке негације“, „контрапозиције“ и „правила закључивања modus ponens“.

Коментар: Задатак је типа (3): Разумијевање процеса индиректног доказивања и његова примјена на примјеру.

Дистрибуција успјешности:

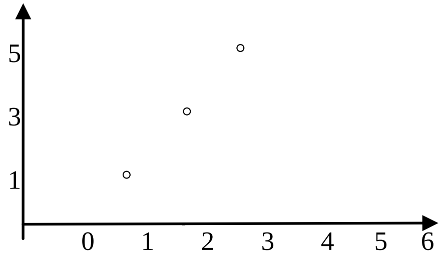
Број бодова	∅	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**Σ**
Број кандидата	13	31	1	0	0	0	0	0	0	0	**45**
%	28.89	68.89	2.22	0	0	0	0	0	0	0	**100.0**

Рефлексије: Потпуно одсуство алата логичког мишљења код тестираних кандидата отвара многа питања о сврсиходности математичког образовања у нашем школском систему. Ово, као и наша ранија истраживања (на примјер, [17], [18]), сугеришу нам да је оправдано формирати хипотезу: „*Велика већина свршених средњошколаца у нас не располаже у свом здраворазумском вокабулару елементарним алатима логичког мишљења*.“[4] Да се закључити да комплетна тестирана популација не располаже било каквим знањима о концептима директног и индиректног доказа и уз њих везаних логичких термина.

Задатак 5. (**9 бодова**) (Установљавање елемената напреднијег алгебарског мишљења)

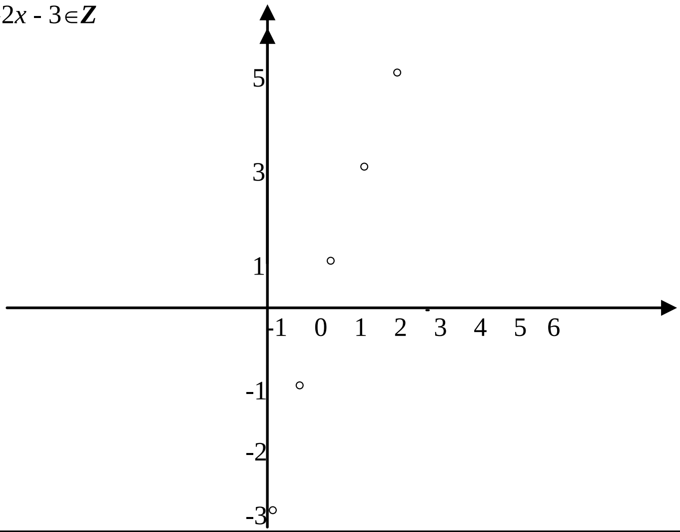
Скицирај графове слиједећих функција: 4.1. $f : \boldsymbol{N} \ni x \to 2x - 3 \in \boldsymbol{N}$; 4.2. $g : \boldsymbol{Z} \ni x \to 2x - 3 \in \boldsymbol{Z}$; 4.3. $h : \boldsymbol{R} \ni x \to 2x - 3 \in \boldsymbol{R}$.

Одговор. 5.1. $f : \boldsymbol{N} \ni x \to 2x - 3 \in \boldsymbol{N}$

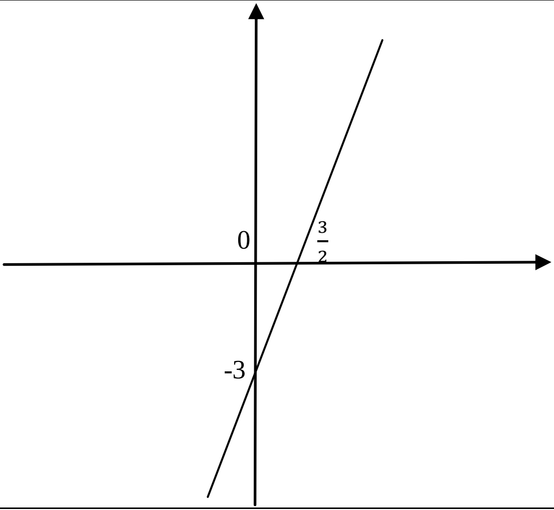


[4] Наравно, ми се у овом тексту не бавимо потврђивањем или оспоравањем ове хипотезе.

Одговор. 5.2. g: $\boldsymbol{Z} \ni x \rightarrow 2x - 3 \in \boldsymbol{Z}$



Одговор. 5.3. h : $\boldsymbol{R} \ni x \rightarrow 2x - 3 \in \boldsymbol{R}$ **.**



Циљеви задатка: Ово је класичан задатак посредством којег се установљава ниво разумијевања концепта функције у различитим окружењима (у полупрстену **N** природних бројева, у прстену **Z** цијелих бројева и у пољу **R** реалних бројева): да ли ученици/студенти гледају на „појам функције као на правило“ или гледају на „појам функције као релацијску везу између објеката“.

Коментари: (1) Задатак је типа (4). На концепт функције може се гледати као на најнижи праг математичке писмености кандидата.
(2) Потпуно разумијевање функција и рад са њима у различитим математичким окружењима омогућава кандидатима да замишљати их као акције, као процесе и као објекте у њиховој посебности. Концепт „функције“ је једна од централних идеја у калкулусима (математичким курсевима који се реализују на техничким факултетима у нас) и основни су алат значајног броја других подручја математике. Још је свјевремено Шломо Винер ([21], Shlomo Vinner 1983) узимао у обзир разлику у разумијевању концепта функције. Винер ([21]) је правио разлику између *концепта дефиниције* функције, с једне стране, и *концепта правила придруживања*, с друге стране. Он је уочавао да ученичко/студентско конструисање графова функција није конзистентно са математичком дефиницијом функције.

Дистрибуција успјешности:

Бр. бодова	∅	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	**Σ**
Бр. кандидата	38	2	0	0	2	0	0	2	0	0	1	**45**
%	84.44	4.44	0	0	4.44	0	0	4.44	0	0	2.22	**100.0**

Рефлексије: Ова три питања у Задатку 6 требало је да послуже као индикатори установљавања концептуалног разумијевања.[5] Такође, ова три питања омогућавају истраживачу да уочи да ли ученици /студенти поентирају функцију као *објект* или као *процес* или као *објект-процес*. Ово истраживање, али и наша ранија истраживачка искуства у утврђивању ученичких/студентских рефлексија на питања у вези са функцијама у различитим октужењима, сугришу да испитаници радије гледају на функцију као на објект него као на *процес* или *акцију.* Дакле, они на придруживање f: $x \to 2x - 3$ гледају као на објект $2x - 3$ у пољу **R** реалних бројева и тако оправдавају нашу хипотезу о њиховом неуочавању функционалне везе $(x,2x\text{-}3) \in f$, односно $x \to 2x - 3$, између варијабле x и терма $2x - 3$ у различитим окружењима.

Задатак 6. (**5 бодова**) (Регистрација нивоа геометријског мишљења)
Одредити тачност/нетачност (односно, коректност/некоректност) слиједећих исказа:
6.1. *Многостраник* је затворена изломљена линија.
6.2. *Четвоространик* је многостраник који има само четири странице.
6.3. Правоугаоник је четвоространик.

[5] О развоју концептуалног разумијевања, погледати текст [11].

6.4. Квадрат је правоугаоник.
6.5. Правоугаоник никад није квадрат.

Одговор.
6.1. Исказ 5.1. је коректна дефиниција многостраника/многоугла.
6.2. Исказ 5.2. је коректна дефиниција четвоространика/четвороугла.
6.3. Исказ 5.3. је тачна тврдња.
6.4. Исказ 5.4. је тачна тврдња.
6.5. Правоугаоник не мора бити квадрат (Кад су му сусједне странице неједнаке дужине) али може бити (Кад су му сусједне странице једнаке дужине.) Према томе, исказ 6.5. (генерално говорећи) није тачан.

Циљеви задатка: Циљ овог задатка је, у складу са Блумовом таксономијом, знање концепата математичког објекта многостраника и четвоространика као и разумијевање постојања спецификација унутар подкатегорије четвоространика.

Коментар: Задатак је на „нивоу 0“ и унутар „нивоу 1“ у складу са класификацијом ван Хиелеовим о нивоима разумијевања геометрије. Требало је да кандидати препознају (Питање 6.1. и Питање 6.2) два основна геометријска концепта те да знају да их прецизније детерминишу. Питања 6.3, 6.4. и 6.5 у овом задатку су тврдње о концепту четвоространика. Дакле, спадају у „ниво 1“ али и унутар „нивоа 2“.

Дистрибуција успјешности:

Број бодова	∅	0	1	2	3	4	5	**Σ**
Број кандидата	1	2	0	5	16	12	7	**45**
%	2.22	4.44	0.0	11.11	35.56	26.67	15.56	**100.0**

Рефлексије: Задатак је дизајниран тако да кандидати препознају дескрипције о многостраницима/или како већина ученика говори – о многоугловима. Очигледно је да су концептуална знања (на нивоу 0) присутна у одговарајућим когнитивнима равнима тестиране популације будући да је 77.78% популације понудило прихватљиве одговоре на њих. На последња два питања, за чије прихватљиве одговоре требало експонирати геометријска знања унутар нивоа 1, понудило је само 19 (42.22%) кандидата. Нажалост, уочено је присуство кандидата који не препознају геометријску фигуру многостраника.

Задатак 7. (**10 бодова**) (Експонирање елемената напреднијег геометријског мишљења) Опиши класификацију четвоространика и за сваку од класа наведи примјере.

Одговор.
Класификација четвространика врши се према слиједећим критеријима:
Критериј **А**: Број парова паралелних страница.
А2: Четвространик има два пара паралелних страница – то су *паралелограми* (примјери: *ромб* и *ромбоид*).
А1: Четвространик има један пар паралелних страница – то су *трапези.*
А0: Четвространик нема ни један пар паралелних страница.

Критериј **Б**: Број правих углова као унутрашњих углова четвространика.
Б0. Четвространик нема правих углова.
Б1**.** Четвространик има један прави угао.
Б2**.** Четвространик има два права угла. (На примјер – *правоугли трапез*)
Б4**.** Четвространик има четри права угла. (На примјер – *квадрат* и *правоугаоник*)

Критериј **В**: Међусобни однос сусједних страница четвространика. (Четвространик који има два пара једнаких сусједних страница је *делтоид*. На примјер, квадрат и ромб су делтоиди. Има делтоида који нису ни квадрат ни ромб.)

Циљеви задатка: Циљ овог задатка је класификација поткатегорија четвространика разврстаних према једном или више предиката.

Дистрибуција успјешности:

Бр.бодова	∅	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	**Σ**
Бр.кандидата	12	24	6	0	2	0	0	2	0	1	0	0	**45**
%	26.67	53.33	13.33	0	4.44	0	0	4.44	0	2.22	0	0	**100.0**

Рефлексије: Проблем разврставања објеката неке категорије, у овом случају категорије четвространика, у поткатегорије према есенцијалним предикатима (једном или више њих) је сигуран индикатор за регистровање нивоа напреднијег геометријског мишљења код ученика/студената. Занемарљиво мали број (6.67%) тестирник кандидата експонирао је посједовање елемената мишљења вишег од „нивоа 0“ (по ван Хиелеовој класификацији).

Задатак 8. (**4 бода**) (Регистрација скуповно-релацијског мишљења)
За скупове A = {2, 4, 6, 8, ...}, B = {4, 8, 12, 16, ...} одредити: 7.1. $A\cup B$; 7.2. $A\cap B$; 7.3. A \ B; 7.4. B \ A .

Одговор.
8.0. A = {2, 4, 6, 8, ...} = $\{a\in\mathbf{N}: (\exists u\in\mathbf{N})(a = 2u)\}$;
B = {4, 8, 12, 16, ...} = $\{b\in\mathbf{N}: (\exists v\in\mathbf{N})(b = 4v)\}$; $B \subset A$.
8.1. $B \subset A \Rightarrow A\cup B = A$;
8.2. $B \subset A \Rightarrow A\cap B = B$;
8.3. A \ B = {2, 6, 10, 14, ...} = $\{x\in\mathbf{N}: (\exists u\in\mathbf{N})(x = 2u) \wedge \neg(\exists v\in\mathbf{N})(x = 4v)\}$;
8.4. $B \subset A \Rightarrow B \setminus A = \varnothing$.

Циљеви задатка: Основни циљ овог задатка је установљавање елемената скуповно-релацијског мишљења проналажењем одговора на питања да ли кандидати: (а) Разумију употребу витичастих заграда? (б) Разумију употребу графичког сомбола ... (три водоравне тачке)? (в) Препознају предикате којима су детерминисани потскупови A и B скупа **N** природних бројева? (г) Знају концепте уније, пресјека и разлике међу скуповима?

Дистрибуција успјешности:

Број бодова	∅	0	1	2	3	4	**Σ**
Број кандидата	6	15	5	7	4	8	**45**
%	13.33	33.33	11.11	15.56	8.89	17.78	**100.0**

Рефлексије: Значајан број кандидата**,** 21 кандидат или 46.67% није понудило никакве (13.33%) или је понудило потпуно неприхватљиве одговоре (33.33%) на постављена питања у овом задатку. Већина кандидата (73.33%) није вична раду са разликом скупова.

Закључак

Проблеми у вези са дизајнирањем математичких задатака одавно су уочени као важна али доста комплексна и екстремно суптилна активност унутар заједница реализатора наставе математике и истраживача математичког образовања. Питања која се природно постављају су:

Да ли овако изабрани задаци одговарају циљевима тестирања?

Да ли су задаци добро дизајнирани да се недвосмислено установи сигнификантно постојање или непостојање изабраних показатеља?

Како утицати на процес подучавања студената посредством реализације математичких курсева Машинског факултета тако да се подигне ниво метематичке писмености будућих студената?

Ова и слична питања била су предмет разговора на састанку ICMI-а 2013. године (Оксфорд, 2-22, јули 2013). Тада је прихваћен став заједнице истраживача математичког образовања да је дизајнирање математичких задатака језгро квалитетног подучавања математике у свим нивоима образовања. Дизајнирање математичких задатака као самосталан проблем ([1]-[5]) или унутар парадигме „методичка знања неопходна за реализацију наставе математике“ ([12], [13], [15], [16], [22], [23]) повремени су предмет разговора унутар заједнице истраживача математичког образовања у посљедњих двадесетак година.

Дизајнирање задатака је битна наставничка/истраживачка активност у процјењивању математичке писмености кандидата али и у установљавању математичких способности и усвојених математичких вјештина. У овом тексту су поентиране двије стране дизајнирања задатака за класификациони тест из математике: очекујућа рјешења која би требало да нуде кандидати и, друго, вредновање успјешности кандидата у томе. Дакле, анализирање теста нема за циљ установљавање нивоа математичке писмености кандидата нити професионалних компетенција њихових наставника, већ превасходно истраживачко стицање искуства у разумијевању како и зашто се у примијењеним наставничким методама подучавања тестираних ученика отвара могућност за регистрацију некомплетних математичких знања, недовољно флуентних алгоритамских вјештина те скромна способност ученичког сналажења у рјешавању проблема, тј. недовољно изражене стратегијске способности.

Литература

J. Ainley and D. Pratt, *The significance of task design in mathemaics education: Examples from propositional reasoning*, In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2005 (Vol. 1, pp. 93-122)

C. V. Berg, *From designing to implementing mathematical tasks: Investigating the changes in the nature of the T-shirt task*, The Mathematics Enthusiast, 9(3)(2012), 347-358

S. Breen and A. O’Shea, *Mathematical Thinking and Task Design*, Irish Math. Soc. Bulletin 66 (2010), 39-49

S. Breen and A. O’Shea, *The Design and Implementation ofMathematical Tasks to Promote Advanced Mathematical Thinking*, Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Rzeszów, Poland, 9th -13th February 2011.

S. Breen and A. O'Shea, *Designing tasks to aid understanding of mathematical functions*, In: 4th Biennial Threshold Concepts Conference and 6th NAIRTL Annual Conference, 27-29th June 2012, Trinity College Dublin.

B. Doig (2013), *Mathematical Tasks and Learning Goals: Examples from Japanese Lesson Study*, In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow* (Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). Melbourne, VIC: MERGA. © Mathematics Education Research Group of Australasia Inc. 2013, (pp. 715-718)

B.Doig, S.Groves and T.Fujii (2011). *The critical role of task development in lesson study*, in Hart, Lynn C.; Alston, Alice S. and Murata, Aki (eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education*, pp. 181-199, Dordrecht: Springer.

T.Fujii and M.Stephens (2001). *Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables*. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 258-264). Melbourne: University of Melbourne.

T.Fujii and M.Stephens (2008). *Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable*. *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Seventeenth Yearbook, pp.127-140

P. Galbraith (2006): *Real World Problems: Developing Principles of Design*, Conference Proceedings MERGA 29(2006), 229-236

S.Groves and B.Doig (2002). *Developing conceptual understanding: The role of the task in communities of mathematical enquiry*. In: (..eds.) *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Norwich: University of East Anglia.

C.Lewis (2002). *Lesson Study: A Handbook of Teacher-Led Instructional Change.* Research for Better Schools, Inc. Philadelphia, PA.

C.Lewis and J.Hurd (2011). *Lesson Study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinneman

A. Pointon, and C. Sangwin (2003) *An analysis of undergraduate core material in the light of hand-held computer algebra systems*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(5), 671-686.

V.Ž.Radović, O.Đokić i M.Trmčić (2013), *Didaktičko-metodička funkcija pitanja u početnoj nastavi matematike*, Pedagoška stvarnost, 59(3), 474-487

S.Rezat and R.Strässer (2012). *From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation*. ZDM, 44(5), 641-651

Д. А. Романо (2013): *Резултати пријемног испита на Машинском факултету у Бањој Луци, одржаног 02.07.2012.* MAT-KOL, XIX (2), 15-19

Д. А. Романо (2014): *Анализа резултата пријемног теста из математике на Машинском факултету у Бањој Луци одржаног 01.07.2013.* IMO, VI, Broj 10, 5-24

C. Sangwin (2003), *New opportunities for encouraging higher level mathematical learning by creative use of emerging computer assessment*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(6), 813-829.

J.Stigler and J.Hiebert (1999). *The Teaching Gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

S.Vinner (1983), *Concept definition, concept image and the notion of function*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14 (3), 293-305.

T.Watanabe, A.Takahashi and M.Yoshida (2008). *A critical step for conducting effective lesson study and beyond*. In F. Arbaugh & P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into Mathematics Teacher Education.* Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE) Monograph Series, Volume 5.

M.Yoshida (1999). *Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development.* Unpublished doctoral dissertation, University of Chicago, Department of Education.

Daniel A. Romano

An example of mathematical tasks design
in establishing students` mathematical proficiency

Summary

This paper describes some principles of mathematical tasks design at the example of classification entrance examination at Banja Luka Faculty of Mechanical Engineering. Through analysis of those tasks some of delicate points in designing of examination tasks are identified. The paper presents a hypothesis that teachers` understanding of the process of designing examination tasks opens up a possibility of evaluating student's thinking in solving so designed tasks.

***Key words and phrases**: task design, problem solving*

***ZDM Math. Subject Classification (2010):** 97B40, 97C30, 97D60*
***AMS Math. Subject Classification (2010):** B40, C30, D60*